Uniwersytet Wrocławski, Instytut Fizyki Doświadczalnej, I Pracownia

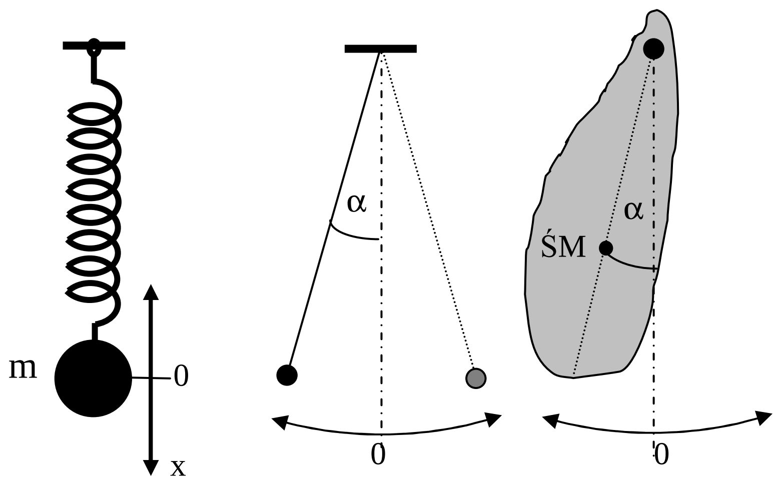
Ćwiczenie nr 5

BADANIE DRGAŃ TŁUMIONYCH

I. WSTĘP

Ruch jest zjawiskiem powszechnym. Tłumienie (wygaszanie) ruchów powoduje opór ośrodka, w którym zachodzi ruch. Przykładem może być ruch samochodu jadącego ze stałą prędkością, którego silnik musi pracować by pokonywać siłę oporu powietrza. Natomiast ruch tłoka w silniku może być przykładem ruchu okresowego, powtarzającego się w czasie, drgającego. Innym, często spotykanym ruchem jest np. ruch wahadła czy drganie struny. Opis takiego ruchu jest prosty wówczas, **gdy pominie się tłumienie**. W podręcznikach fizyki ruch taki jest nazwany **ruchem harmonicznym prostym**, a dobrze znanym modelem tego ruchu jest ruch masy m zawieszonej na sprężynie (Rys. 1A). Inne przykłady to ruch masy w wahadle matematycznym (Rys. 1B), oraz ruch tzw. wahadła fizycznego (Rys. 1C).

Ciało porusza się ruchem harmonicznym prostym wzdłuż linii prostej (jak na Rys. 1A), gdy działa na niego siła sprężysta $F_s = -kx$. Korzystając z drugiej zasady dynamiki otrzymuje się następujące równanie różniczkowe:



Rys. 1. Przykłady układów drgających ruchem harmonicznym

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \tag{1}$$

gdzie m – masa ciała; k – współczynnik sprężystości sprężyny nazywany niekiedy siłą kierującą, x – wychylenie z położenia równowagi. Wielkości k i m decydują o częstości kołowej drgań ω, w sposób opisany wzorem

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\ \text{, lub}\quad k = m\omega^2 \tag{2}$$

Częstość kołowa ω jest związana ze „zwykłą” częstością ν wzorem $\omega = 2\pi\nu$, zaś okres drgań tego ruchu:

$$T = \frac{1}{\nu}\ \text{jest równy}\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{2a}$$

Najprostszym rozwiązaniem równania (1) bezpośrednio opisującym ruch masy m jest wzór (funkcja):

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi), \tag{3}$$

gdzie: *A* – amplituda (maksymalne wychylenie); φ - faza początkowa drgań (faza drgania w momencie gdy zaczynamy mierzyć czas ruchu). Wykresem równania (3) jest sinusoida. W przypadku realnego ruchu, czyli ruchu tłumionego należy uwzględnić siłę oporu ośrodka. Do równania ruchu harmonicznego prostego (1), trzeba dopisać jeszcze człon uwzględniający siłę oporu. Zwykle zakłada się, że siła oporu ośrodka F_{oporu} jest proporcjonalna do prędkości poruszającego się ciała. Założenie to sprawdza się w przypadku ciał poruszających się w atmosferze ziemskiej od prędkości równej zeru, aż do prędkości dźwięku (ponad 1000 km/godzinę). Oznaczając prędkość ciała przez v a współczynnik oporu ośrodka przez b, wzór na siłę oporu przybiera postać:

$$F_{oporu} = -b\,v = -b\frac{dx}{dt}. \tag{4}$$

Równanie ruchu drgań tłumionych możemy więc zapisać następująco:

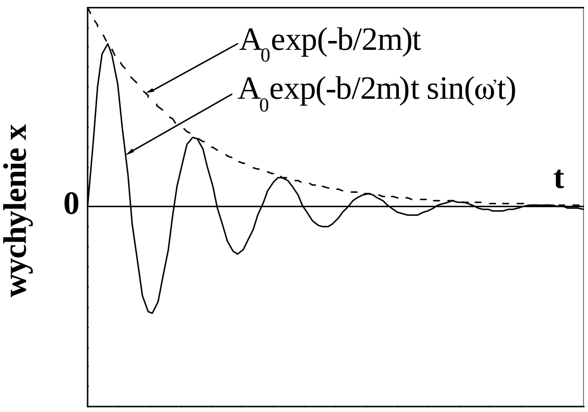
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0. \tag{5}$$

Rozwiązanie tego równania, czyli funkcja, która bezpośrednio opisuje ruch ciała ma postać:

$$x(t) = \left(A_0\, e^{-\frac{b}{2m}t}\right)\sin(\omega' t + \varphi). \tag{6}$$

Pierwszy człon tego wyrażenia (w nawiasie), który maleje w miarę upływu czasu i opisuje zmniejszanie się amplitudy wskutek tłumienia, nazywa się amplitudą drgania tłumionego. Wykres funkcji x(t) pokazano na Rys. 2.

Im większy jest współczynnik oporu ośrodka b, a dokładniej wartość b/2m, tym większe jest



Rys. 2. Wykres wychylenia w ruchu harmonicznym tłumionym w zależności od czasu. Krzywa wykładnicza przedstawia zanik amplitudy drgań w czasie**.**

tłumienie i szybsze malenie amplitudy. Czynnik b/2m nazywa się stałą tłumienia. Zwróćmy uwagę, że bez tłumienia częstość kołowa drgań ω jest równa $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, natomiast w obecności tłumienia częstość kołowa ω′ jest mniejsza i równa $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$. Obecność sił oporu ośrodka powoduje więc po pierwsze, zanikanie amplitudy drgań, a po drugie, zmniejszenie ich częstości. Jeżeli siły oporu są zbyt duże, to ruch przestaje być ruchem periodycznym i wychylenie nie osiąga ujemnych wartości x, a tylko dąży wykładniczo do zera. Ruch zachowuje charakter okresowy wówczas gdy $\frac{k}{m}-\left(\frac{b}{2m}\right)^2>0$.

Przyjrzyjmy się bliżej zanikowi amplitudy drgań. Gdy odczytujemy wartości dwu kolejnych amplitud w odstępie czasu równym okresowi drgań T, spełniony jest związek:

$$\frac{A_n(t)}{A_{n+1}(t+T)}=\frac{A_0 e^{-(\frac{b}{2m})t}}{A_0 e^{-(\frac{b}{2m})(t+T)}}=\frac{1}{e^{-(\frac{b}{2m})T}}=e^{(\frac{b}{2m})T} \tag{6}$$

lub, po obliczeniu logarytmu naturalnego

$$\ln\frac{A_n}{A_{n+1}}=(\frac{b}{2m})T=\delta . \tag{7}$$

Wielkość δ - nazywamy logarytmicznym dekrementem tłumienia. Jeśli porównamy amplitudy oddzielone między sobą całkowitą liczbą N okresów, czyli oddzielone czasem NT , to wówczas:

$$\delta=\frac{1}{N}(\frac{b}{2m})T=\frac{1}{N}\ln\frac{A_n}{A_{n+N}} . \tag{8}$$

Odczytując wartości wybranej amplitudy A_n jako pierwszej i wartości amplitudy (n+N)-tej możemy wyznaczyć na podstawie tego wzoru logarytmiczny dekrement tłumienia δ. Znając logarytmiczny dekrement tłumienia δ oraz okres T możemy wyznaczyć stałą tłumienia b/2m.

W tym ćwiczeniu badamy ruch wahadła fizycznego, t.j. bryły sztywnej, zawieszonej powyżej środka ciężkości i mogącej wykonywać ruch obrotowy wokół punktu zawieszenia (Rys. 1c). Miarą wychylenia z położenia równowagi jest kąt α między kierunkiem pionu a prostą przechodzącą przez środek masy (ŚM) bryły i punkt zawieszenia. Ruch drgający odbywa się pod wpływem <u>momentu siły</u> grawitacji względem punktu zawieszenia, który jest równy:

$$M_g=-mgd\sin\alpha=-K\sin\alpha , \tag{9}$$

gdzie m – masa bryły, g – przyspieszenie ziemskie, d – odległość środka masy od punktu zawieszenia. Wielkość K = mgd nazywamy momentem kierującym. Dla małych wychyleń, $\sin\alpha\approx\alpha$ (α w mierze łukowej). Zgodnie z drugą zasadą dynamiki dla ruchu obrotowego, jeśli nie ma innych momentów sił, ruch takiej bryły opisuje równanie:

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2}+K\alpha=0 , \tag{10}$$

gdzie J jest momentem bezwładności wahadła. To równanie nie uwzględnia sił oporu ośrodka. Jeśli chcemy je uwzględnić, to wprowadzamy <u>moment siły oporu ośrodka M_{oporu}</u>, który jest proporcjonalny do prędkości kątowej $\frac{d\alpha}{dt}$ i przeciwnie do niej skierowany: czyli $M_{oporu}=-B\frac{d\alpha}{dt}$.

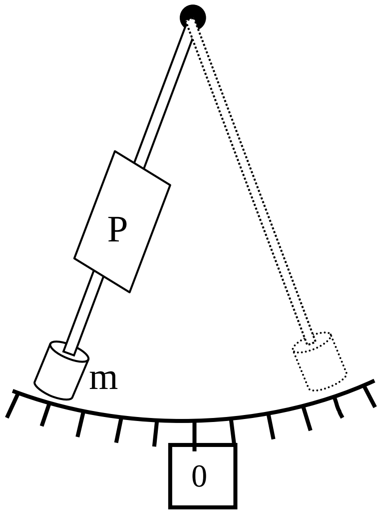
Wtedy równanie różniczkowe tłumionego ruchu wahadła ma postać

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2}+B\frac{d\alpha}{dt}+K\alpha=0 . \tag{11}$$

Pod względem formalnym równanie (10) jest podobne do równania (1), a równanie (11) do równania (5). Możemy więc korzystać z podanych wcześniej wzorów na wychylenie, częstość kołową, i logarytmiczny dekrement tłumienia, zastępując: x przez α, k przez K, m przez J, b przez B.

II. OPIS EKSPERYMENTU

Do badania drgań tłumionych służy wahadło fizyczne pokazane na Rys. 3. Na metalowym pręcie umieszczona jest lekka płytka (P), która w zależności od ustawienia względem płaszczyzny ruchu wahadła powoduje większy lub bardzo mały opór powietrza. Prócz tego możemy zmienić moment bezwładności wahadła, umieszczając na pręcie dodatkową masę m.



Rys. 3. Schemat wahadła. P – płytka, m – masa

III. POMIARY

1. Wyznaczyć okres drgań wahadła T, bez dodatkowej masy m (samego pręta), z płytką na pręcie wahadła skierowaną równolegle do płaszczyzny ruchu wahadła (mały opór powietrza). W tym celu wychylić wahadło do końca skali, puścić swobodnie i zmierzyć czas 20 wahnięć.
2. Taki sam pomiar przeprowadzić dla płytki ustawionej prostopadle do płaszczyzny ruchu wahadła (duży opór powietrza). Porównać okresy z pomiaru 1 i 2.
3. Dla wahadła z płytką skierowaną prostopadle do kierunku drgań zmierzyć amplitudę co drugiego wychylenia, aż do zaniku drgań.
4. Dla wahadła obciążonego dodatkowo masą m = 50g wykonać pomiary opisane w punktach 1 - 3.

IV. OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARÓW

1. Obliczyć wartość logarytmicznego dekrementu tłumienia i stałej tłumienia
2. Podać ocenę standardowych niepewności wyznaczonych wartości.

IV. LITERATURA

[1] I. W. Sawieliew, Kurs Fizyki T. I, PWN, Warszawa 1987.
[2] R. R. Resnick, D. Halliday, FIZYKA T 1, PWN, Warszawa 1993.
[3] H. Szydłowski, Pracownia fizyczna, PWN, Warszawa 1997.

V. ZAGADNIENIA DO KOLOKWIUM

Ruch harmoniczny prosty – parametry; równanie ruchu. Przykłady układów drgających ruchem harmonicznym. Ruch harmoniczny tłumiony – równanie ruchu tłumionego. Logarytmiczny dekrement tłumienia. Badanie ruchu tłumionego na przykładzie wahadła fizycznego zastosowanego w ćwiczeniu.