

Ćwiczenie nr 15

DRGANIA MASY ZAWIESZONEJ NA SPRĘŻYNIE

I. WSTĘP

I.1. Siły sprężyste

Robert Hooke sformułował w r. 1660 ogólne prawo opisujące własności sprężyste ciał stałych mówiące, że odkształcenie ciała jest proporcjonalne do przyłożonego naprężenia. Prawo to jest spełnione dla małych odkształceń. W tym ćwiczeniu ograniczymy się do rozważań tylko takich właśnie odkształceń. W przypadku rozciąganej lub ściskanej sprężyny miarą odkształcenia jest jej wydłużenie x (dodatnie, gdy sprężyna jest rozciągana a ujemne, gdy jest ściskana). Ponieważ naprężenie jest proporcjonalne do działającej siły zewnętrznej F_z powodującej odkształcenie prawo Hooke'a dla sprężyny można zapisać w postaci:

$$F_z = kx \quad (1)$$

Współczynnik proporcjonalności k charakteryzuje własności sprężyste określonej sprężyny

Pionowo wiszącą sprężynę można rozciągnąć zawieszając na jej dolnym końcu ciężarek o masie m . Rozważmy najpierw przypadek, gdy sprężyna jest nieważka lub jej masa własna jest znikomo mała w porównaniu z masą zawieszzonego na niej ciężarka. Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki Newtona, sprężyna rozciągnięta ciężarkiem, działa na ciężarek siłą sprężystą F_{spr} równą co do wartości sile rozciągającej sprężynę (1), lecz przeciwnie do niej skierowaną. Zapisujemy to:

$$F_{spr} = -kx \quad (2)$$

Ciężarek będzie w równowadze w położeniu, x_0 , w którym siła sprężystości zrównoważy jego ciężar mg :

$$mg - kx_0 = 0 \quad (3)$$

Stąd wydłużenie x_0 odpowiadające stanowi równowagi jest równe:

$$x_0 = \frac{mg}{k} \quad (4)$$

I.2. Równanie ruchu ciężarka zawieszzonego na nieważkiej sprężynie.

Jeśli sprężyna zostanie wydłużona tak, by wypadkowa ciężaru (mg) i siły sprężystej ($-kx$), działających na masę m nie była równa zero, wówczas zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona, ciężarek będzie poruszał się ruchem przyspieszonym, z przyspieszeniem:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Równanie ruchu ma postać:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx \quad (5a)$$

lub po podzieleniu przez m i po uwzględnieniu wzoru (4):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}(x - x_0) = 0 \quad (5b)$$

Wprowadzając nową zmienną $z = x - x_0$, określającą wychylenie masy m z położenia równowagi, otrzymujemy

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m}z = 0 \quad (5c)$$

Rozwiązaniem równania (5c) jest funkcja opisująca drganie harmoniczne wokół położenia równowagi

$$z = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (6)$$

gdzie A jest amplitudą drgania (maksymalnym wychyleniem z położenia równowagi), ω_0 , równe

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (7a)$$

jest nazywane częstością kołową, a φ jest fazą początkową drgania.

Amplituda A i faza początkowa φ zależą od warunków początkowych (od tego jak puścimy w ruch ciężarek). Czas T_0 , w którym układ wykonuje jedno drganie nazywany okresem drgań jest równy:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (7b)$$

Zmiana wartości amplitudy drgań nie powoduje zmiany ich częstości. Ten fakt zwany **izochronizmem drgań** jest konsekwencją liniowego związku pomiędzy siłą sprężystą F_s a wydłużeniem x sprężyny (wzór (2)).

I.3. Ruch ciężarka zawieszonego na sprężynie, której masa $m_s \neq 0$

Ruch ten opisuje wzór podobny do wzoru (6), z tym, że okres drgań T jest dłuższy, równy:¹

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{1}{3}m_s}{k}} \quad (8)$$

to jest taki, jaki byłby w przypadku nieważkiej sprężyny o takim samym współczynniku sprężystości, obciążonej ciężarkiem o łącznej masie $M = m + \frac{1}{3}m_s$. Zależność wyrażoną wzorem (8) można przedstawić w wygodniejszej do obliczeń postaci, podnosząc ją do kwadratu:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{k} + \frac{4\pi^2 m_s}{3k} \quad (9a)$$

Widać, że T^2 zależy w sposób liniowy od wartości masy m zawieszonyj na sprężynie, co możemy zapisać w sposób uproszczony:

$$T^2 = Am + B \quad (9b)$$

Współczynnik kierunkowy prostej A opisującej zależność $T^2(m)$ jest równy

$$A = \frac{4\pi^2}{k} \quad (10)$$

zaś wartość rzędnej B , dla $m=0$ jest równa

$$B = T^2(m=0) = \frac{4\pi^2 m_s}{3k} = A \frac{m_s}{3} \quad (11)$$

¹ Patrz Dodatek I

II. POMIARY

II.1. Sprawdzenie izochronizmu drgań

Na szalce kładziemy odważnik o masie 50 gramów i odciągamy delikatnie szalkę w dół o 1 cm, po czym puszczamy ją swobodnie. Mierzmy stoperem czas trwania 20-stu pełnych drgań. Następnie, nie zmieniając obciążenia przeprowadzamy analogiczne pomiary dla 9-ciu różnych amplitud od 2 do 10 cm co 1 cm. Przy jednej wybranej wartości amplitudy powtórzyć pomiary 5-ciokrotnie

II.2. Wyznaczanie współczynnika sprężystości k

Na szalkę kładziemy kolejno odważniki o masach od 10 do 100 g, notując wydłużenia sprężyny w stanie równowagi (nieruchomej) dla każdego obciążenia. Następnie powtarzamy pomiar zmniejszając obciążenie sprężyny zaczynając od największej masy (100 g), poprzez coraz mniejsze (90, 80, 70, itd).

II.3. Zależność okresu drgań T od masy m obciążającej sprężynę

Pomiary okresów drgań T_i dokonujemy tak jak w p-cie II.1, zmieniając masy odważników w granicach od 40 g do 100 g, co 10 g. Na zakończenie kładziemy na szalce odważnik o nieznannej masie m_x (wskazany przez prowadzącego zajęcia) i mierzymy okres jego drgań.

III. OPRACOWANIE WYNIKÓW

III.1. Na podstawie wyników uzyskanych w p-cie II.1. sprawdzić, czy okres drgań T zależy od amplitudy.

W tym celu obliczyć średnią wartość okresu drgań z pięciu pomiarów przeprowadzonych przy tej samej wartości amplitudy oraz znaleźć maksymalne odchylenie od średniej. Następnie sprawdzić, czy wyniki pomiarów dla innych amplitud mieszczą się w tak wyznaczonym przedziale niepewności pomiarowej.

III.2. Na podstawie wyników uzyskanych w p-cie II.2 obliczyć średnie wartości wydłużeń sprężyny x pod

wplywem określonych obciążeń $x_0 = \frac{x_{01} + x_{02}}{2}$

gdzie x_{01} –wydłużenie przy obciążeniu rosnącym, a x_{02} – przy obciążeniu malejącym. Następnie sporządzić wykres zależności wydłużenia sprężyny od ciężaru F odważników znajdujących się na szalce, odkładając siłę F na osi odciętych (poziomej). a wydłużenie x_0 na osi rzędnych (pionowej). Sprawdzić czy w całym zakresie zastosowanych obciążeń spełnione jest prawo Hooke'a. Wyznaczyć współczynnik kierunkowy prostej przedstawionej na wykresie, który jest równy odwrotności stałej sprężystości k.

III.3. Na podstawie wyników uzyskanych w p-cie II.3. wykreślić na papierze milimetrowym zależność kwadratu okresu drgań układu od masy m obciążającej sprężynę ($T^2 = f(m)$). **Masa ta jest równa sumie masy odpowiedniego ciężarka i masy szalki. Masa szalki wynosi 17,9 g.**

Z wykresu odczytać wartość nieznannej masy m_x , wartość współczynnika kierunkowego prostej, który jest równy stałej A, oraz wartość T^2 przy zerowej masie obciążającej ($m = 0$), która jest równa stałej B. Porównać otrzymane wartości z obliczonymi na podstawie wzorów (10) i (11). Sprawdzić, czy udział masy sprężyny m_s w łącznej masie M, od której zależy okres drgań T (wzór (8)) jest równy $1/3 m_s$.

Masa sprężyny wyznaczona za pomocą wagi wynosi 75 g.

III.4 Sformułować wnioski.

IV. LITERATURA

1. A. K. Wróblewski, J. A. Zakrzewski, Wstęp do fizyki, T.1, PWN, Warszawa § IV.5.1
2. H. Szydłowski –Pracownia fizyczna , PWN, Warszawa 1999, § 7.4
3. I.W. Sawielew –Kurs fizyki T.1,PWN, Warszawa 1989 § 50

V. ZAGADNIENIA DO KOLOKWIUM

1. Siły sprężyste; prawo Hooke'a – zakres stosowalności.
2. Równanie ruchu ciężarka zawieszzonego na nieważkiej sprężynie – wprowadzenie i interpretacja. Izochronizm drgań.
3. Ruch ciężarka zawieszzonego na sprężynie, której masa $m_s \neq 0$.

DODATEK 1. DO ĆWICZENIA Nr 15

Wyprowadzenie równania (8)

Aby znaleźć równanie ruchu ciężarka zawieszono na sprężynie, której masy m_s nie można zaniedbać, skorzystamy z zasady zachowania energii mechanicznej mówiącej, że w układzie ciał, na które działają tylko siły zachowawcze, suma energii kinetycznej E_{kin} i potencjalnej E_p pozostaje stała, czyli:

$$E_{mech} = E_{kin} + E_p = \text{const.} \quad (D1)$$

Na E_p układu składa się energia sprężysta odkształconej sprężyny $E_{p\ spr}$ i energia potencjalna grawitacyjna $E_{p\ grav}$ wynikająca z przyciągania obu mas (m i m_s) przez masę Ziemi M_{Ziemi} .

Jeśli przyjmiemy, że sprężysta energia potencjalna nie odkształconej sprężyny jest równa zero, to po odkształceniu równa jest pracy wykonanej przez siłę zewnętrzną F_{zewn} podczas wydłużania sprężyny

$$E_{p\ spr} = \int_0^x F_{zewn} \cdot dx = \int_0^x kx \cdot dx = \frac{1}{2} kx^2 \quad (D2)$$

Grawitacyjna energia potencjalna mas m i m_s , oznaczona jako $E_{p\ grav}$, (wynikająca z przyciągania obu mas przez Ziemię) przy wydłużaniu sprężyny maleje, gdyż masy zajmują niższe położenie. Przyjmijmy, że dla $x=0$ $E_{p\ grav}(0)=0$. Gdyby sprężyna była nieważka, to grawitacyjna energia potencjalna byłaby równa

$$E_{p\ grav}(x) = -Px \quad (D3a)$$

gdzie P -ciężar masy zawieszonoj na sprężynie. $P = mg = kx_0$ (porównaj ze wzorem (4))

W przypadku sprężyny ważkiej, P we wzorze (D3a) trzeba zastąpić przez ciężar efektywny $P_{ef} = kx_r$ gdzie x_r jest wydłużeniem sprężyny pod wpływem własnego ciężaru i ciężaru masy m , gdy układ jest w równowadze. Zatem grawitacyjna energia potencjalna układu wałka sprężyna +masa m może być wyrażona wzorem

$$E_{pc} = -kx_r \cdot x \quad (D3)$$

Energia kinetyczna układu ciężarek – sprężyna jest sumą energii kinetycznej ciężarka

$$E_{k\ cięż} = \frac{1}{2} mv^2 \quad (D4)$$

i energii kinetycznej sprężyny, której górny koniec jest nieruchomy, a dolny porusza się z prędkością v taką samą jak ciężarek. Masa dm_s elementu sprężyny o długości dy wynosi

$$dm_s = \frac{m_s}{L} \cdot dy \quad (D5)$$

gdzie L jest długością sprężyny.

Prędkość elementu masy sprężyny, oddalonego o y od górnego, nieruchomego końca, jest proporcjonalna do odległości y

$$v(y) = v \cdot \frac{y}{L} \quad (D6)$$

Dlatego energia kinetyczna tego elementu będzie równa

$$dE_{k\ spr}(y) = \frac{dm_s \cdot v^2(y)}{2} = \frac{m_s \cdot v^2 \cdot y^2}{2L^3} dy \quad (D7)$$

a energia kinetyczna całej sprężyny

$$E_{k\ spr} = \int_0^L dE_{k\ spr}(y) = \frac{m_s \cdot v^2}{2L^3} \int_0^L y^2 dy = \frac{1}{2} \frac{m_s \cdot v^2}{3} \quad (D8)$$

Podstawiając wzory (D2), (D3), (D4) i (D8) do (D1) otrzymujemy

$$\frac{1}{2} kx^2 - kx_r \cdot x + \frac{1}{2} (m + \frac{1}{3} m_s) \cdot v^2 = \text{const} \quad (D9)$$

Różniczkując względem czasu równanie (D9) otrzymuje się następujące równanie ruchu

$$\left(m + \frac{1}{3}m_s\right) \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k(x - x_r) = 0 \quad (\text{D10})$$

lub po wprowadzeniu nowej zmiennej $z = x - x_r$ (z jest wydłużeniem z liczonym od punktu równowagi)

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m + \frac{1}{3}m_s} \cdot z = 0 \quad (\text{D11})$$

Rozwiązaniem powyższego równania jest funkcja:

$$z = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{D12})$$

w której

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{1}{3}m_s}} = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{D13})$$

Zatem okres drgań T jest równy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{1}{3}m_s}{k}} \quad (\text{D14})$$

co jest zgodne ze wzorem (8) z instrukcji do ćwiczenia.