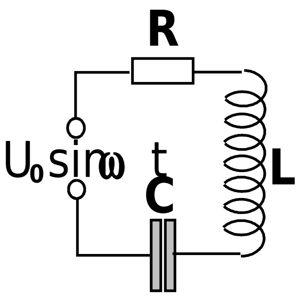
REZONANS ELEKTROMAGNETYCZNY 59



Rys 1. Schemat szeregowego obwodu RLC

Dla obwodów elektrycznych zasilanych napięciem stałym, stosunek napięcia U między dwoma punktami przewodnika do natężenia prądu J płynącego przez ten przewodnik, jest wielkością stałą (prawo Ohma)

$$\frac{U}{J} = R \tag{1}$$

Wzór (1) stanowi definicję oporu elektrycznego (rezystancji) R danego przewodnika. Wykres zależności J = f(U) powinien być wg prawa Ohma linią prostą. Wiadomo jednak, że w praktyce opór elektryczny różnych elementów obwodu zależy np. od temperatury (żarówka), lub od napięcia (dioda półprzewodnikowa). Takie elementy obwodu nazywamy elementami nieliniowymi.

W obwodzie zasilanym napięciem zmiennym sinusoidalnym $U=U_0 \sin(\omega t)$, zawierającym tylko opór omowy R prawo Ohma także jest spełnione, a natężenie prądu, niezależnie od częstości ω, jest równe:

$$J = \frac{U_0 \sin(\omega t)}{R} = J_0 \sin(\omega t) \tag{2}$$

gdzie U_0 oraz J_0 są wartościami maksymalnymi (amplitudami) odpowiednio napięcia i natężenia prądu. Ze wzoru (2) wynika, że napięcie i natężenie są w zgodnych fazach i proporcjonalne do siebie.

Sytuacja ulega zmianie, jeżeli elementem obwodu prądu zmiennego będzie pojemność C lub indukcyjność (samoindukcja) L. Rolę oporu odgrywa wtedy tzw. zawada pojemnościowa Z_C lub zawada indukcyjna Z_L. Można też stosować do nich odpowiednio nazwy „opór pojemnościowy” i „opór indukcyjny”. Są one równe:

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} \quad \text{i} \quad Z_L = \omega L \tag{3}$$

i jak widać zależą od ω. W pierwszym obwodzie z pojemnością, natężenie prądu zmiennego wyprzedza napięcie o π/2, czyli:

$$\text{(dla C)} \quad J = \frac{U_0 \sin(\omega t + \pi/2)}{Z_C} = J_0 \sin(\omega t + \pi/2) \tag{4}$$

a w drugim natężenie opóźnia się o π/2 względem napięcia, czyli:

$$\text{(dla L)} \quad J = \frac{U_0 \sin(\omega t - \pi/2)}{Z_L} = J_0 \sin(\omega t - \pi/2) \tag{5}$$

Istotna jest analiza obwodu, w którym połączono szeregowo cewkę indukcyjną (samoindukcja L), kondensator (pojemność C) i opór omowy R. Obwód taki pokazano na Rys. 1. Stanowi on elektryczną analogię mechanicznego układu drgającego, złożonego z masy m, zawieszonej na sprężynie o stałej sprężystości k, i poruszającej się w ośrodku o stałej tłumienia b, pod wpływem okresowej siły zewnętrznej F_z. (Patrz ćwiczenie nr 8 „Rezonans mechaniczny”)[1].

Natężenie prądu J płynącego w takim obwodzie elektrycznym jest równe:

[1] Dokładniej mówiąc pełna analogia opisu matematycznego zachodzi dla wychylenia x i ładunku q lub napięcia U. Wykresowi zależności J od ω odpowiada wykres zależności prędkości **v** masy m. od ω.

$$J = \frac{U_0 \sin(\omega t - \varphi)}{Z_{RLC}} = J_0 \sin(\omega t - \varphi) \quad (6)$$

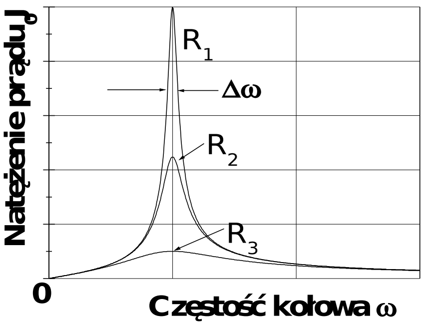
gdzie φ jest przesunięciem fazowym pomiędzy napięciem i natężeniem prądu, a Z_{RLC} oznacza zawadę tego obwodu elektrycznego, określoną wzorem:

$$Z_{RLC} = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \quad (7)$$

Jak widać ze wzoru (3) zawady pojemnościowa Z_C i indukcyjna Z_L, zależą od częstości kołowej ω przyłożonego napięcia. Pierwsza odwrotnie proporcjonalnie, a druga wprost proporcjonalnie. Dlatego też wypadkowa zawada obwodu RLC będzie od niej zależeć w sposób niemonotoniczny, wykazując minimum dla tej wartości ω, dla której $Z_L = \omega L = Z_C = \frac{1}{\omega C}$ Widać to ze wzoru (7), wg którego wypadkowa zawada Z_{RLC} obwodu jest wtedy równa oporowi omowemu R. Wskutek tego krzywa zależności amplitudy natężenia prądu J_0 od częstości przyłożonego napięcia wykazuje maksimum przy częstości kołowej ω_{rez}, nazywanej częstością rezonansową. Jest ona równa;

$$\omega_{rez} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8)$$

Zjawisko to nosi nazwę rezonansu napięciowego dla połączonych szeregowo elementów RLC. Przykładowe krzywe rezonansowe dla trzech wartości R, pokazano na Rys. 2.



Rys. 2. Krzywe rezonansowe w szeregowym obwodzie RLC dla trzech wartości oporu: $R_1 < R_2 < R_3$

$\Delta\omega$ zaznaczona na krzywej dla R_1 oznacza szerokość krzywej na poziomie ok. 0.7 wartości natężenia prądu w maksimum, czyli 0.5 wartości mocy maksymalnej.

W praktyce, musimy jeszcze uwzględnić, że cewka indukcyjna oprócz indukcyjności L wykazuje także pewien niewielki opór omowy, $R_{\Omega L}$ który jest równy oporowi drutu miedzianego, którym nawinięto cewkę.

Z analizy obwodu pokazanego na Rys. 1 wynika, że suma napięć na oporze R, indukcyjności L i pojemności C musi być równa napięciu zewnętrznemu, czyli:

$$U_R + U_L + U_C = U_{GEN}. \quad (9)$$

Jeśli więc w warunkach rezonansu $Z_{RLC} = R$, to to oznacza, że $U_L \cong -U_C$, czyli że oba napięcia mają przeciwne znaki, a ich suma jest bliska zeru.

Obliczenia i eksperyment pokazują, że każde z tych napięć może w warunkach rezonansu wielokrotnie przekroczyć wartość napięcia generatora. Elektrotechnicy nazywają to niebezpieczne dla obwodów elektrycznych zjawisko „przepięciem”. Fizycy mówią o **„rezonansie napięć”**, mimo iż krzywa pokazana na Rys. 2. sugerowałaby nazwę „rezonans prądów”. Chodzi więc o podkreślenie faktu, że wtedy każde z napięć U_C i U_L jest większe od U_{GEN}.

Przeciwne znaki napięć U_L i U_C wynikają ze wzorów (4) i (5), czyli z przesunięć fazowych pomiędzy napięciem i natężeniem prądu w obwodzie.

Dla przypadku gdy zawady pojemnościowa i indukcyjna nie są sobie równe a więc gdy $\omega \neq \omega_0$, wypadkowe przesunięcie fazowe w omawianym obwodzie można obliczyć ze wzoru:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \qquad (10)$$

Kąt φ może zmieniać się w granicach od $+\pi/2$ do $-\pi/2$, w zależności od wkładu zawady pojemnościowej i indukcyjnej. W szczególnym przypadku, gdy są one równe, tg φ jest równy zeru, a więc $\varphi = 0$

Dla wszystkich układów rezonansowych, nie tylko elektrycznych, bardzo istotnym parametrem jest tzw. **dobroć Q układu**. Jest ona zdefiniowana jako:

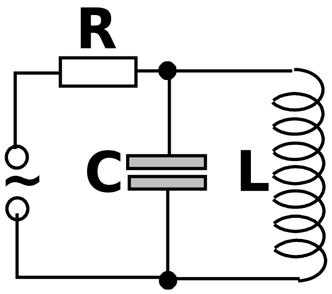
$$Q = 2\pi \frac{\text{energia zmagazynowana w układzie}}{\text{średnia energia tracona w jednym okresie}} \qquad (11)$$

Im większa jest wartość Q danego układu drgającego, tym ostrzejsza, i bardziej wąska jest krzywa rezonansowa. Obliczenia wykazują, że pomiędzy dobrocią Q i szerokością krzywej rezonansowej $\Delta\omega$, zwaną szerokością połówkową, gdyż mierzymy ją na poziomie połowy mocy traconej przez układ, istnieje związek:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \qquad (12)$$

W elektrycznych układach rezonansowych energia jest zgromadzona w postaci energii pola elektrycznego naładowanego kondensatora i energii pola magnetycznego wytwarzanego przy przepływie prądu przez cewkę indukcyjną. Dla wyznaczenia wartości Q musimy zmierzyć szerokość krzywej rezonansu na wysokości 0.5 wartości maksymalnej mocy traconej, czyli na wysokości ok. 0.7 wartości maksymalnej natężenia prądu, (gdyż moc P zależy od kwadratu natężenia prądu $P = J^2R$). Dobroć Q można też wyznaczyć na podstawie wzoru:[2]

$$Q = \frac{U_C}{U_{GEN}} \quad \text{(przy rezonansie)} \qquad (13)$$



Rys 3. Uproszczony schemat równoległego obwodu RLC

Jeśli elementy L i C połączymy równolegle, tak jak pokazano na Rys. 3., to przy częstości napięcia zmiennego równej ω_0 zaobserwujemy także zjawisko rezonansu, z tym, że tym razem będzie to **rezonans prądowy** a nie napięciowy. Jego istotą jest przepływ prądu o dużym natężeniu pomiędzy kondensatorem C i cewką indukcyjną L. W tej sytuacji natężenie prądu pobieranego z zasilacza osiągnie w warunkach rezonansu wartość minimalną, a więc odwrotnie niż to miało miejsce dla obwodu szeregowego. Analiza matematyczna układu równoległego jest bardziej skomplikowana niż w przypadku obwodu połączonego szeregowo.

[2] Patrz np.Sawieliew, Kurs Fizyki T II, PWN Warszawa 1989, str.325