

Instrukcja oceny niepewności pomiarów w I Pracowni Fizycznej (ONP)

Nowe normy międzynarodowe

I. Wprowadzenie

W roku 1995, po wielu latach pracy, uzgodniono międzynarodowe normy dotyczące terminologii i sposobu określania niepewności w pomiarach. Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna (ISO) opublikowała odpowiedni „Przewodnik” [1]. Dokonano jego przekładu na język polski [2]. Stosowanie norm ISO w zakresie obliczania i podawania niepewności pomiarów jest obowiązkiem, podobnym do obowiązku stosowania układu SI.

2. Wyrażanie niepewności pomiaru – nowe normy międzynarodowe

Wszystkie pomiary obarczone są **niepewnościami pomiarowymi**, które można nieograniczenie zmniejszać, lecz nie można ich całkowicie wyeliminować.

Przewodnik przyjmuje definicję:

Niepewność pomiaru – parametr związany z wynikiem pomiaru, charakteryzujący rozrzut wartości, który można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej.

Słowo „niepewność”, bez dodatkowych określeń, ma podwójne znaczenie: zarówno pojęcia ogólnego, jak i miary ilościowej. W przypadku stosowania terminu w znaczeniu ilościowym dodaje się odpowiedni przymiotnik. Stosowane są następujące terminy o nowym znaczeniu:

1. **Niepewność standardowa** (standard uncertainty) wyniku pomiaru bezpośredniego wielkości X . Ważną nowością jest symbol niepewności standardowej u (uncertainty), którego możemy używać na trzy sposoby: u , $u(x)$, $u(\text{stężenie NaCl})$. Przewodnik nie wprowadził osobnego symbolu dla pojęcia niepewności względnej. Zgodnym z logiką symbolem jest u_r (indeks r od ang. relative) zalecony do użytku w USA przez National Institute of Standards and Technology.
2. **Złożona niepewność standardowa $u_c(y)$** (combined standard uncertainty) jest niepewnością wyników pomiarów pośrednich $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots, x_K)$, gdzie symbole $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots, x_K$ oznaczają K wielkości mierzonych bezpośrednio. Jest ona obliczana (wyznaczana) z prawa przenoszenia niepewności pomiaru.
3. **Niepewność rozszerzona U lub $U(y)$** (expanded uncertainty) jest miarą pewnego „przedziału ufności” otaczającego wynik pomiaru pośredniego. Oczekuje się, że w przedziale tym jest zawarta duża część wartości, które w rozsądny sposób można przypisać wielkości mierzonej. Wartość U oblicza się mnożąc złożoną niepewność standardową przez bezwymiarowy współczynnik rozszerzenia k .
4. **Współczynnik rozszerzenia k** (coverage factor) jest mnożnikiem złożonej niepewności standardowej, stosowanym w celu uzyskania niepewności rozszerzonej.
5. **Ocena niepewności metodą typu A** (type A evaluation of uncertainty) – oparta na metodzie określania niepewności pomiaru drogą analizy statystycznej serii wyników

pomiarów.

6. **Ocena niepewności metodą typu B** (type B evaluation of uncertainty) – obliczana na podstawie rozkładu prawdopodobieństwa przyjętego przez eksperymentatora (prawdopodobieństwa subiektywnego). Ocena typu B może być zastosowana w każdej sytuacji.

3. Inne miary niepewności. Niepewność maksymalna

Przyjęta przez *Przewodnik* ogólna definicja niepewności jako parametru charakteryzującego rozrzut wyników pomiaru nie wyklucza, że rozrzut ten określać mogą też inne parametry. Niemniej w dokumencie tym inne możliwe miary rozrzutu nie są wymienione nawet z nazwy.

W wielu sytuacjach używana jest miara niepewności, której nazwą uznaną przez literaturę jest **błąd graniczny**. (Alternatywną nazwą spotykaną w podręcznikach jest **błąd maksymalny**). Zgodnie z logiką ogólnej definicji niepewności, właściwą nazwą winna być **niepewność maksymalna**. Niepewność maksymalna Δx jest miarą deterministyczną, twierdzimy mianowicie, że można określić przedział

$$x_0 - \Delta x < x_i < x_0 + \Delta x,$$

w którym mieszczą się *wszystkie* wyniki pomiaru x_i , aktualnie wykonane i przyszłe. Z powyższej nierówności wynika, że wartość rzeczywista x_0 zawarta jest *na pewno* w przedziale $x_i \pm \Delta x$ wokół dowolnego wyniku pomiaru x_i .

4. Niepewności pomiarów bezpośrednich

4.1. Metoda typu A obliczania niepewności standardowej

Ocena typu A opiera się na analizie statystycznej serii wyników pomiarów. Wykonywanie n pomiarów bezpośrednich jest odpowiednikiem losowania n -elementowej próbki $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ z nieskończonej licznej populacji, którą stanowią wszystkie możliwe do wykonania pomiary. Za **wynik pomiaru** przyjmuje się **średnią arytmetyczną** n wyników pomiarów

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1)$$

Niepewnością standardową wyniku pomiaru wielkości X nazywamy odchylenie standardowe eksperymentalne średniej arytmetycznej \bar{x} , które oblicza się ze wzoru

$$u(x) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (2)$$

UWAGA! Chociaż niepewność ta odnosi się do \bar{x} jej symbolem jest $u(x)$ a nie $u(\bar{x})$.

Ocenami typu A są wszelkie inne metody określania niepewności przy użyciu metod statystycznych, np. niepewności parametrów dopasowania prostej regresji do punktów

eksperymentalnych.

4.1.1 Prosta regresji

Zagadnienie polega na poprowadzeniu prostej

$$y = ax + b \quad (3)$$

jak najlepiej dopasowanej do zbioru n punktów doświadczalnych $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots (x_n, y_n)$. Celem dopasowania jest nie tylko uzyskanie efektu wizualnego, ale przede wszystkim uzyskanie ocen wartości parametrów a i b opisujących prostą, oraz ich niepewności $u(a)$ i $u(b)$. Najczęściej wykorzystujemy do tego celu **metodę najmniejszych kwadratów**. Najpowszechniejszy wariant tej metody, stosowany gdy niepewności przypisane punktom eksperymentalnym są jednakowe, prowadzi do następujących wzorów na a i b :

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{D}, \quad (4)$$

$$b = \frac{(\sum x_i^2)(\sum y_i) - (\sum x_i)(\sum x_i y_i)}{D}, \quad (5)$$

gdzie

$$D = n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2.$$

oraz na ich niepewności standardowe $u(a)$ i $u(b)$

$$u(a) = s_y \sqrt{\frac{n}{D}}, \quad u(b) = s_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{D}}, \quad (6)$$

gdzie

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2}{n - 2}}. \quad (7)$$

4.2. Metoda typu B obliczania niepewności standardowej

Niepewność standardową szacuje się metodą typu B w przypadku, gdy dostępny jest tylko jeden wynik pomiaru, albo gdy wyniki nie wykazują rozrzutu. Wówczas niepewność standardową ocenia się na podstawie wiedzy o danej wielkości lub o przedziale, w którym wartość rzeczywista powinna się mieścić.

4.2.1. Niepewność wzorcowania

W przypadku wyników nie wykazujących rozrzutu głównym przyczynkiem niepewności pomiarów jest **niepewność wzorcowania (niepewność maksymalna)** $\Delta_d x$.

Producenci przyrządów takich jak przymiar milimetrowy, suwmiarka czy termometr lekarski na ogół nie określają ich dokładności. Powszechnie uważa się, że niesprecyzowana bliżej „dokładność” (niepewność wzorcowania $\Delta_d x$) jest równa wartości najmniejszej działki skali, zwanej *działką elementarną*. Jej wartość wynosi dla linijki 1 mm, suwmiarki

0,05 mm, śruby mikrometrycznej 0,01 mm, termometru lekarskiego 0,1°C. Ocena ta może być skorygowana w górę lub w dół zgodnie z posiadaną wiedzą i doświadczeniem. Na przykład, jeżeli mierzymy linijką średnicę monety jednogroszowej i oceniamy „na oko” również dziesiąte części milimetra, to niepewność wzorcowania $\Delta_d x$ może zmniejszyć się do 0,2 mm. Z drugiej strony, przy pomiarze rozmiarów pokoju taśmą mierniczą, niepewność wzorcowania należy przyjąć większą niż 1 mm, choć skalę z podziałką milimetrową mamy na całej pięciometrowej taśmie.

Przyjmuje się, że wartość $\Delta_d x$ jest równa połowie szerokości rozkładu jednostajnego, a niepewność standardowa wynosi

$$u(x) = \frac{\Delta_d x}{\sqrt{3}} \quad (8)$$

(Jest to odchylenie standardowe eksperymentalne w rozkładzie jednostajnym).

W wyniku rewolucji w miernictwie wynikającej z postępów elektroniki prawie wszystkie używane współcześnie przyrządy pomiarowe to albo proste przyrządy ze skalą analogową, albo też elektroniczne mierniki cyfrowe. Dla każdego z typów tych przyrządów określenie niepewności wzorcowania (niepewności maksymalnej) przebiega nieco inaczej.

Niepewność wzorcowania przyrządów analogowych

W przyrządzie analogowym jego „dokładność” precyzuje tzw. klasa przyrządu, która wyraża w procentach stosunek niepewności maksymalnej Δx do pełnego wychylenia miernika na danym zakresie pomiarowym. Jej sens jest taki, że wyniki prawidłowo wykonanych pomiarów nie różnią się od wartości rzeczywistej x_0 więcej niż o $\pm \Delta x$. I tak by było, gdyby obserwator odczytywał absolutnie dokładnie położenie wskazówki na skali przyrządu. Odczyt dokonywany jest z pewną dokładnością (do działki skali, do $\frac{1}{2}$ działki skali, itd.), dlatego też niepewność wzorcowania (niepewność maksymalna) przyrządu analogowego jest sumą niepewności wynikającej z klasy i z odczytu, a niepewność standardową obliczamy ze wzoru

$$u(x) = \frac{[(klasa \times zakres / 100) + \Delta x_{odczytu}]}{\sqrt{3}} \quad (9)$$

Niepewność wzorcowania przyrządów cyfrowych

Inaczej odbywa się określanie niepewności wzorcowania (niepewności maksymalnej) dla przyrządów z cyfrowym wyświetlaniem wyników pomiarów. W tego typu przyrządach nie występuje niepewność związana z odczytem wielkości mierzonej. Zmianę wartości mierzonej odpowiadającą przeskokowi ostatniej cyfry nazwać można *działką elementarną* danego przyrządu. Ważne jest, by działki elementarnej nie utożsamiać z niepewnością pomiaru przyrządu z cyfrowym wyświetlaczem.

W celu określenia niepewności wzorcowania musimy zajrzeć do instrukcji przyrządu. Znajdziemy tam informację o wartości niepewności wzorcowania, najczęściej podaną jako kombinacja liniowa wartości mierzonej i zakresu

$$\Delta_d x = C_1 \cdot \text{wartość mierzona} + C_2 \cdot \text{zakres pomiarowy.} \quad (10)$$

Uzyskaną w ten sposób niepewność maksymalną zamieniamy na niepewność standardową przy użyciu wzoru $u(x) = \frac{\Delta_d x}{\sqrt{3}}$

4.2.2. Niepewność eksperymentatora

Drugim przyczynkiem niepewności pomiarów nie wykazujących rozrzutu jest **niepewność eksperymentatora (niepewność maksymalna)** $\Delta_e x$, spowodowana przyczynami znanymi eksperymentatorowi, ale od niego niezależnymi. Eksperymentator korzysta ze swego doświadczenia i wiedzy w celu określenia niepewności $\Delta_e x$ oraz wynikającej stąd niepewności standardowej. Niepewność standardową eksperymentatora można oszacować na podstawie rozkładu jednostajnego; wtedy $u(x) = \frac{\Delta_e x}{\sqrt{3}}$.

4.2.3. Niepewność tablicowa

Niepewnościami obarczone są również wyniki zaczerpnięte z literatury, tablic matematycznych lub kalkulatora. Jeśli nie jest podana wartość odchylenia standardowego eksperymentalnego (jeśli jest podana, wtedy niepewność $u(x)$ jest równa temu odchyleniu) i brak jest jakiegokolwiek informacji o niepewności, przyjmujemy, że **niepewność tablicowa (niepewność maksymalna)** $\Delta_t x$ jest równa 10 jednostkom ostatniego miejsca dziesiątego.

Niepewność standardowa jest szacowana na podstawie rozkładu jednostajnego; $u(x) = \frac{\Delta_t x}{\sqrt{3}}$.

4.2.4 Całkowita niepewność standardowa

Najczęściej przyczynki od niepewności wzorcowania i niepewności eksperymentatora występują jednocześnie i wtedy niepewność standardowa szacowana metodą B powinna być obliczona ze wzoru

$$u(x) = \sqrt{\frac{(\Delta_d x)^2}{3} + \frac{(\Delta_e x)^2}{3}}. \quad (11)$$

Jeśli natomiast obydwa typy niepewności, A i B, występują równocześnie, to należy posłużyć się następującym wzorem na niepewność standardową (całkowitą):

$$u(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \frac{(\Delta_d x)^2}{3} + \frac{(\Delta_e x)^2}{3}}. \quad (12)$$

5. Pomiar pośredni. Prawo przenoszenia niepewności

W większości pomiarów fizycznych szukana wielkość nie daje się zmierzyć bezpośrednio. Jest ona wyznaczana z zależności funkcyjnej

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots, x_K), \quad (13)$$

gdzie $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots, x_K$ oznacza K wielkości mierzonych bezpośrednio. Zakłada się, że znane są wyniki pomiarów (średnie arytmetyczne) tych wielkości $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_k, \dots, \bar{x}_K$ oraz ich niepewności standardowe $u(x_1), u(x_2), u(x_3), \dots, u(x_k), \dots, u(x_K)$. Wynik (końcowy) pomiaru wielkości złożonej oblicza się ze wzoru

$$\bar{y} \cong f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_k, \dots, \bar{x}_K). \quad (14)$$

Przy obliczaniu niepewności standardowej wielkości złożonej należy rozróżnić nieskorelowane i skorelowane pomiary wielkości mierzonych bezpośrednio x_k .

5.1 Wielkość złożona - pomiary bezpośrednie nieskorelowane

W pomiarach nieskorelowanych (chodzi tu o korelację między wielkościami mierzonymi, której miarą są współczynniki korelacji) każdą wielkość mierzy się w innym, niezależnym doświadczeniu.

Złożoną niepewność standardową $u_c(y)$ wielkości liczonej pośrednio y oblicza się korzystając z prawa przenoszenia niepewności pomiarów bezpośrednich nieskorelowanych w postaci

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2 u^2(x_k)}. \quad (15)$$

5.2 Wielkość złożona – pomiary bezpośrednie skorelowane

Pomiary należy uznać za **skorelowane** zawsze wtedy, gdy dane wielkości są mierzone bezpośrednio za pomocą jednego zestawu doświadczalnego, w jednym doświadczeniu. W praktyce oznacza to, że wszystkie pomiary elektryczne wykonywane w laboratoriach studenckich są pomiarami skorelowanymi. Z uwagi na bardzo skomplikowane obliczanie złożonej niepewności standardowej wielkości mierzonej pośrednio o skorelowanych wielkościach wejściowych (mierzonych bezpośrednio) **w pracowniach studenckich** wygodniej jest postępować następująco.

Wyniki y_i oblicza się korzystając z kompletu wyników pomiarów bezpośrednich K wielkości $x_{k,i}$ uzyskanych w i pomiarze $y_i = f(x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}, \dots, x_{k,i}, \dots, x_{K,i})$. Seria wyników y_i , uzyskanych w n pomiarach, stanowi próbkę losową podobnie jak w pomiarach bezpośrednich. Przyjmuje się, że wynikiem pomiaru pośredniego jest

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad (16)$$

a złożoną niepewność standardową wyniku określa wzór

$$u_c(y) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}. \quad (17)$$

5.3 Prawo przenoszenia niepewności maksymalnej

W przypadku rachunku niepewności opartego na pojęciu niepewności maksymalnej przyczynki pochodzące od poszczególnych zmiennych wejściowych obliczamy tak samo, ale zamiast sumy geometrycznej obliczamy sumę algebraiczną ich wartości bezwzględnych,

$$\Delta y = \sum_{k=1}^K \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \Delta x_k \right|. \quad (18)$$

Postępowanie takie nazywane było dawniej metodą różniczki zupełnej. Analogiczne obliczenie dla względnej niepewności maksymalnej nosiło nazwę metody pochodnej logarytmicznej.

6. Niepewność rozszerzona i zapisywanie wyników

Dla celów komercyjnych, przemysłowych, zdrowia i bezpieczeństwa zachodzi konieczność podania miary niepewności, która określa przedział otaczający wynik pomiaru zawierający dużą, z góry określoną, część wyników, jakie można przypisać wielkości mierzonej. Niepewność spełniająca powyższy warunek nazywa się **niepewnością rozszerzoną** i oznacza symbolem $U(y)$ lub U . Definiuje się ją wzorem $U(y) = k u_c(y)$, gdzie k nazywa się **współczynnikiem rozszerzenia**. Jest to umownie przyjęta liczba, wybrana tak, by w przedziale $y \pm U(y)$ znalazła się większość wyników pomiaru potrzebna do danych zastosowań, na przykład na I Pracowni do wnioskowania o zgodności z wartością tabelaryczną. W Przewodniku stwierdza się, że wartość k wynosi najczęściej $2 \div 3$.

Przewodnik przyjmuje zasadę zapisywania niepewności z dokładnością do **dwu cyfr znaczących**.

Spośród dwu sposobów skrótowego zapisu wartości mierzonej i jej niepewności (patrz Tabela), utrwała się zasada, by zapis z użyciem symbolu " \pm " stosować wyłącznie do niepewności rozszerzonej, natomiast zapis z użyciem nawiasów do niepewności standardowej.

Najważniejsze elementy Międzynarodowej Normy Oceny Niepewności Pomiaru

Wielkość	Symbol i sposób obliczania
Niepewność standardowa: ocena typu A	Statystyczna analiza serii pomiarów, w tym: $u(x)$ dla serii n równoważnych pomiarów $u(x) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $u(a)$, $u(b)$ dla parametrów prostej regresji, itp.
Niepewność standardowa: ocena typu B	Naukowy osąd eksperymentatora, $u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}$ (gdy znana jest niepewność Δx – wzorcowania $\Delta_d x$, eksperymentatora $\Delta_e x$, odczytu z tablic czy

	kalkulatora $\Delta_k x$)
Złożona niepewność standardowa	$u_c(y) = \sqrt{\sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2 u^2(x_k)}$ (dla nieskorelowanych x_k), K – liczba wielkości mierzonych bezpośrednio
Współczynnik rozszerzenia	$2 \leq k \leq 3$
Niepewność rozszerzona	$U(y) = k u_c(y)$
Zalecany zapis niepewności	standardowa $g = 9,781 \text{ m/s}^2$, $u_c(g) = 0,076 \text{ m/s}^2$ $g = 9,781(76) \text{ m/s}^2$ rozszerzona $g = 9,78 \text{ m/s}^2$, $U(g) = 0,15 \text{ m/s}^2$ $g = (9,78 \pm 0,15) \text{ m/s}^2$ (zasada podawania 2 cyfr znaczących niepewności)

Literatura

1. *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, ISO, Switzerland 1995.
2. *Wyrażanie niepewności pomiaru: Przewodnik*, Główny Urząd Miar, Warszawa 1999.
3. H. Szydłowski, *Postępy Fizyki*, 51 Z 2, 92 (2000).
4. A. Zięba, *Postępy Fizyki*, 52 Z 5, 238 (2001).
5. H. Szydłowski, *Niepewności w pomiarach. Międzynarodowe standardy w praktyce*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2001.
6. A. Zięba, *Opracowanie wyników pomiaru w naukach przyrodniczych i technicznych z uwzględnieniem zaleceń Międzynarodowej Normy Oceny Niepewności Pomiaru*, w druku